

$Q(x)$ более простыми функциями можно найти в работе [5]. Вот одна из таких аппроксимаций, справедливая для $x > 3$:

$$Q(x) \approx \frac{1}{x\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right). \quad (3.44)$$

Итак, мы оптимизировали (в смысле минимизации P_B) порог γ , но не оптимизировали принимающий фильтр в блоке 1 (рис. 3.1). Далее нашей целью является оптимизация этого фильтра путем максимизации аргумента $Q(x)$ в формуле (3.42).

3.2.2. Согласованный фильтр

Согласованный фильтр (matched filter) — это линейное устройство, спроектированное, чтобы давать на выходе максимально возможное для данного передаваемого сигнала отношение сигнал/шум. Предположим, что на вход линейного, инвариантного во времени (принимающего) фильтра, за которым следует устройство дискретизации (рис. 3.1), подается известный сигнал $s(t)$ плюс шум AWGN $n(t)$. В момент времени $t = T$ сигнал на выходе устройства дискретизации $z(T)$ состоит из компонента сигнала a_i и компонента шума n_0 . Дисперсия шума на выходе (средняя мощность шума) записывается как σ_0^2 . Отношение мгновенной мощности шума к средней мощности шума, $(S/N)_T$, в момент $t = T$ вне устройства дискретизации на этапе 1 равно следующему:

$$\left(\frac{S}{N}\right)_T = \frac{a_i^2}{\sigma_0^2}. \quad (3.45)$$

Нам нужно найти передаточную функцию фильтра $H_0(f)$ с максимальным отношением $(S/N)_T$. Сигнал $a_i(t)$ на выходе фильтра можно выразить через передаточную функцию фильтра $H(f)$ (до оптимизации) и Фурье-образ сигнала на входе

$$a_i(t) = \int_{-\infty}^{\infty} H(f)S(f)e^{2\pi ift} df, \quad (3.46)$$

где $S(f)$ — Фурье-образ сигнала на входе, $s(t)$. Если двусторонняя спектральная плотность мощности шума на входе равна $N_0/2$ Вт/Гц, то с помощью формул (1.19) и (1.53) мощность шума на выходе можно записать следующим образом:

$$\sigma_0^2 = \frac{N_0}{2} \int_{-\infty}^{\infty} |H(f)|^2 df. \quad (3.47)$$

Объединяя формулы (3.45) и (3.47), получаем выражение для $(S/N)_T$:

$$\left(\frac{S}{N}\right)_T = \frac{\left| \int_{-\infty}^{\infty} H(f)S(f)e^{2\pi ift} df \right|^2}{N_0/2 \int_{-\infty}^{\infty} |H(f)|^2 df}. \quad (3.48)$$

Найдем теперь значение $H(f) = H_0(f)$, при котором $(S/N)_T$ достигает максимума. Для этого нам понадобится *неравенство Шварца*, одна из форм записи которого представлена ниже.

$$\left| \int_{-\infty}^{\infty} f_1(x) f_2(x) dx \right|^2 \leq \int_{-\infty}^{\infty} |f_1(x)|^2 dx \int_{-\infty}^{\infty} |f_2(x)|^2 dx \quad (3.49)$$

Равенство достигается при $f_1(x) = k f_2^*(x)$, где k — произвольная константа, а знак “*” обозначает комплексно сопряженное значение. Если отождествить $H(f)$ с $f_1(x)$ и $S(f)e^{2\pi i f T}$ с $f_2(x)$, можем записать следующее:

$$\left| \int_{-\infty}^{\infty} H(f) S(f) e^{2\pi i f T} df \right|^2 \leq \int_{-\infty}^{\infty} |H(f)|^2 df \int_{-\infty}^{\infty} |S(f)|^2 df . \quad (3.50)$$

Подстановка в выражение (3.48) дает

$$\left(\frac{S}{N} \right)_T \leq \frac{2}{N_0} \int_{-\infty}^{\infty} |S(f)|^2 df \quad (3.51)$$

или

$$\max \left(\frac{S}{N} \right)_T = \frac{2E}{N_0}, \quad (3.52)$$

где энергия E входного сигнала $s(t)$ равна

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} |S(f)|^2 df . \quad (3.53)$$

Следовательно, максимальный выход $(S/N)_T$ зависит от *энергии входного сигнала* и *спектральной плотности мощности шума*, но не от конкретной формы сигнала.

Равенство в выражении (3.52) получается только при использовании передаточной функции оптимального фильтра $H_0(f)$:

$$H(f) = H_0(f) = k S^*(f) e^{2\pi i f T} \quad (3.54)$$

или

$$h(t) = \mathfrak{F}^{-1} \left\{ k S^*(f) e^{2\pi i f T} \right\}. \quad (3.55)$$

Поскольку $s(t)$ — вещественный сигнал, с помощью формул (А.29) и (А.31) можно записать следующее:

$$h(t) = \begin{cases} ks(T-t) & 0 \leq t \leq T \\ 0 & \text{для остальных } t \end{cases} . \quad (3.56)$$

Итак, импульсная характеристика фильтра, обеспечивающего максимальное отношение сигнал/шум на выходе, является зеркальным отображением сигнала сообщения

$s(t)$, запаздывающим на время передачи символа T . Отметим, что задержка в T секунд делает уравнение (3.56) *причинным*, т.е. запаздывание на T секунд делает $h(t)$ функцией положительного времени в промежутке $0 \leq t \leq T$. Без задержки в T секунд отклик $s(-t)$ нереализуем, поскольку в этом случае он является функцией отрицательного времени.

3.2.3. Реализация корреляции в согласованном фильтре

В формуле (3.56) и на рис. 3.7, а отражено основное свойство согласованного фильтра: *импульсная характеристика такого фильтра — это зеркальное отображение (относительно оси $t=0$) сигнала с некоторой задержкой*. Следовательно, если сигнал равен $s(t)$, его зеркальное отображение равно $s(-t)$, а зеркальное отображение, запаздывающее на T секунд, — это $s(T-t)$. Выход $z(t)$ причинного фильтра во временной области можно описать как свертку принятого входного сигнала $r(t)$ с импульсной характеристикой фильтра (см. раздел А.5):

$$z(t) = r(t) * h(t) = \int_0^t r(\tau) h(t - \tau) d\tau. \quad (3.57)$$

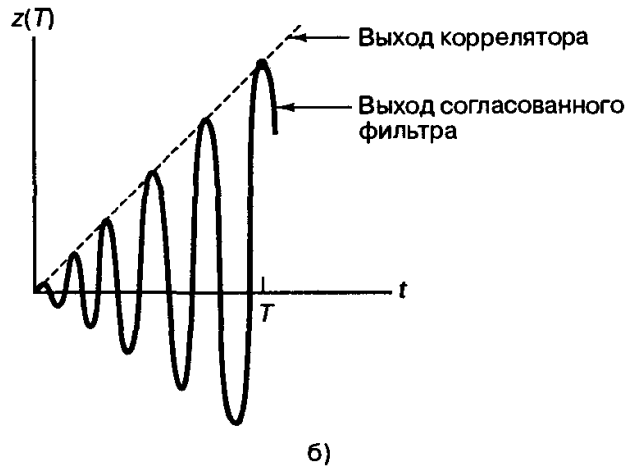
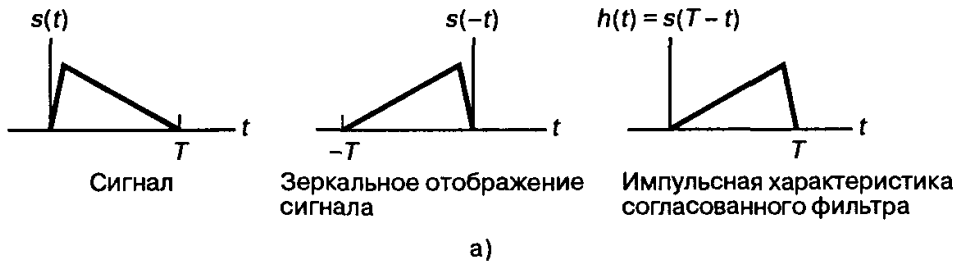


Рис. 3.7. Коррелятор и согласованный фильтр: а) характеристика согласованного фильтра; б) сравнение выходов коррелятора и согласованного фильтра

Подставляя $h(t)$ из формулы (3.56) в $h(t - \tau)$ в формуле (3.57) и выбирая произвольную константу k равной единице, получаем следующее:

$$\begin{aligned} z(t) &= \int_0^t r(\tau) s[T - (t - \tau)] d\tau = \\ &= \int_0^t r(\tau) s(T - t + \tau) d\tau. \end{aligned} \quad (3.58)$$

Для момента времени $t = T$ формулу (3.58) можно переписать следующим образом:

$$z(T) = \int_0^T r(\tau) s(\tau) d\tau. \quad (3.59)$$

Из последнего выражения видно, что интеграл от произведения принятого сигнала $r(t)$ на копию переданного сигнала $s(t)$ на интервале передачи символа представляет собой *корреляцию* $r(t)$ с $s(t)$. Предположим, что принятый сигнал $r(t)$ коррелирует со всеми сигналами-прототипами $s_i(t)$ ($i = 1, \dots, M$) и для этого используется набор из M корреляторов. Сигнал $s_i(t)$, корреляция которого (или интеграл от произведения) с $r(t)$ дает максимальное значение $z_i(T)$, — и есть сигнал, который согласуется с $r(t)$ лучше остальных. Далее это свойство корреляции мы будем использовать для оптимального детектирования сигналов.

3.2.3.1. Сравнение свертки и корреляции

Работа согласованного фильтра описывается математической операцией *свертки*; сигнал сворачивается с импульсной характеристикой фильтра. Работа коррелятора описывается математической операцией *корреляции*; сигнал коррелирует с копией самого себя. Довольно часто термин “согласованный фильтр” используется как синоним термина “коррелятор”. Как такое возможно, если математические операции различны? Напомним, что процесс свертки двух сигналов использует один из сигналов, обращенный во времени. Кроме того, импульсная характеристика согласованного фильтра определяется именно через сигнал, обращенный во времени. Следовательно, свертка в согласованном фильтре с обращенной во времени функцией дает еще одно обращение во времени, подавая на выход (в конце интервала передачи символа) то, что является корреляцией сигнала с собственной копией. Значит, принимающий фильтр, изображенный на рис. 3.1, можно реализовать либо как согласованный фильтр, либо как коррелятор. Важно отметить, что выходы коррелятора и согласованного фильтра одинаковы *только в момент времени $t = T$* . Для синусоидального входа выход коррелятора, $z(t)$, на интервале $0 \leq t \leq T$ приблизительно описывается линейной функцией. В то же время выход согласованного фильтра приблизительно описывается синусоидой, амплитуда которой в том же промежутке времени модулирована линейной функцией (см. рис. 3.7, б). Поскольку при соизмеримых входах выходы согласованного фильтра и коррелятора идентичны в момент взятия выборки $t = T$, функции согласованного фильтра и коррелятора, изображенные на рис. 3.8, часто используются как взаимозаменяемые.

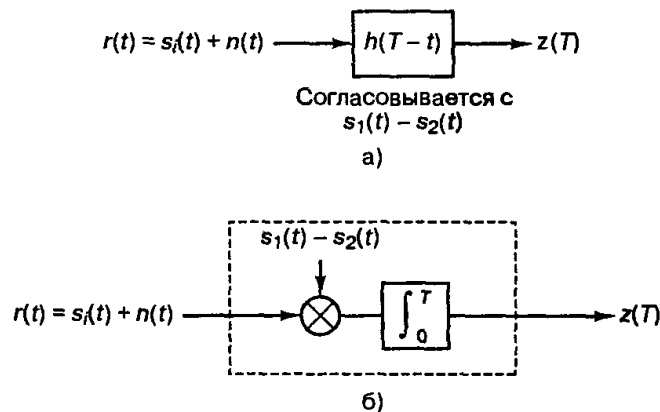


Рис. 3.8. Эквивалентность согласованного фильтра и коррелятора: а) согласованный фильтр; б) коррелятор